6. cvičení - teorie

24. 11. 2022

Definice 1. Nechť $x \in \mathbb{R}$. Potom číslo $k \in \mathbb{Z}$ splňující $k \leq x \leq k+1$ nazýváme *celou částí* čísla x a značíme $\lfloor x \rfloor$ nebo $[x]$.

Definice 2. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel a $L \in \mathbb{R}$. Řekneme, že L je *vlastní limita posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : |a_n - L| < \varepsilon.$$

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu ∞ (resp. $-\infty$), jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R} \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : a_n > K \text{ (resp. } < K).$$

Limity jsou jednoznačňe určené.

Věta 3 (O vybrané posloupnosti)**.** Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel s limitou $A \in \mathbb{R}$. Buď posloupnost $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ vybraná z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Potom už $\lim_{k\to\infty} b_k = A$.

Věta 4 (Aritmetika limit)**.** Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti reálných čísel a mějme $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}^*$. Potom platí:

- $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = A + B$, máli pravá strana smysl.
- $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = A \cdot B$, máli pravá strana smysl.
- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$, máli pravá strana smysl.

Věta 5 (Dva strážníci / Sendvič)**.** Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou tři posloupnosti reálných čísel splňující:

- $\exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} \, n \geq n_0 : a_n \leq c_n \leq b_n$,
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = A \in \mathbb{R}^*$,

potom je $\lim_{n\to\infty} c_n = A$.

Věta 6 (mizející a omezená)**.** Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti reálných čísel splňující:

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená,
- $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$,

potom je $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$.

Věta 7 (O posloupnosti s kladnými členy)**.** Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost kladných reálných čísel a $n \in \mathbb{N}$. Potom platí:

- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A \implies \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A$,
- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0$,
- $\lim_{n\to\infty} a_n = A \iff \lim_{n\to\infty} {a_n}^m = A^m \iff \lim_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{A}$.

Další užitečná fakta:

- RŮSTOVÁ ŠKÁLA: $\ln^\alpha n \ll n^\beta \ll b^n \ll n! \ll n^n$, kde $a \in (0,1), b > 1$
- $A^n - B^n = (A-B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \cdots + A^2B^{n-3} + AB^{n-2} + B^{n-1})$
- $(A+B)^n = A^n + \binom{n}{1}A^{n-1}B + \binom{n}{2}A^{n-2}B^2 + \cdots + B^n$
- $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ *(2. cvičení)*
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ *(dokázáno ve cvičení 5 - příklad 6)*
- platí $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$ pro $a > 1$ *(dokázáno ve cvičení 5 - příklad 6)*
- platí $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ pro $a \in (0,1)$ *(dokázáno ve cvičení 5 - příklad 6)*
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pro $a > 0$ *(dokázáno ve cvičení 5 - příklad 6)*
- $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$
- $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{x_n})^{x_n} = e$, pro posloupnost $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.
- $x - 1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x$
- $\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 1$